Санкт-Петербургский государственный университет
Фундаментальная математика и механика
Математика

Боровицкий Вячеслав Андреевич

Классы Харди нескольких переменных

Дипломная работа

Научный руководитель:
д. ф.-м. н. Кисляков С.В.

Рецензент:
к. ф.-м. н. Руцкий Д.В.

Санкт-Петербург
2017

Saint Petersburg state university
Fundamental mathematics and mechanics
Mathematics

Viacheslav Borovitskiy

Hardy spaces in several variables

Graduation Thesis

Scientific supervisor:
Sergey Kislyakov

Reviewer:
Dmitry Rutsky

Saint Petersburg
2017

Содержание

§1 Введение

В данной работе мы рассматриваем некоторые вопросы о K-замкнутости пары весовых пространств Харди на двумерном торе $H^r(w_1(\cdot,\cdot)), H^p(w_2(\cdot,\cdot))$ в паре соответствующих им весовых пространств Лебега $L^r(w_1(\cdot,\cdot)), L^p(w_2(\cdot,\cdot))$.

Пусть (X_1, X_2) совместимая пара банаховых или квази-банаховых пространств (то есть они вложены в некоторое объемлющее топологическое векторное пространство), Y_1 и Y_2 — замкнутые подпространства соответственно в X_1 и X_2. Введем определение.

Определение. Пара (Y_1, Y_2) называется K-замкнутой в паре (X_1, X_2), если существуют такие две абсолютные константы C_1, C_2, что для всех элементов $f \in Y_1 + Y_2$, $g \in X_1$, $h \in X_2$ таких, что $f = g + h$, найдутся такие элементы $g' \in Y_1$, $h' \in Y_2$, что $f = g' + h'$ и при этом $\|g'\|_{X_1} \le C_1 \|g\|_{X_1}$, $\|h'\|_{X_2} \le C_2 \|h\|_{X_2}$.

Теоремы о K-замкнутости интересны сами по себе, так как в таком случае пара (Y_1, Y_2) наследует многие интерполяционные свойства пары (X_1, X_2), в частности верна формула $(Y_1, Y_2)_{\theta,q} = (X_1, X_2)_{\theta,q} \cap (Y_1 + Y_2)$ для интерполяции пространств вещественным методом.

Напомним, что классические пространства Харди на n-мерном торе это

$$H^p(\mathbb{T}^n) = \text{Clos Lin}\left\{ z_1^{j_1} z_2^{j_2} \dots z_n^{j_n} \;\middle|\; (j_1, j_2, \dots, j_n) \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\},$$

где $0 < p \le \infty$, при $p < \infty$ замыкание берется в $L^p(\mathbb{T}^n)$-норме, а при $p = \infty$ в $*$-слабой топологии.

Вопрос K-замкнутости пары $(H^r(\mathbb{T}^n), H^p(\mathbb{T}^n))$ в паре $(L^r(\mathbb{T}^n), L^p(\mathbb{T}^n))$ для $n = 1$ решен давно и может уже считаться классическим, причем исторически интерполяционные свойства шкалы $H^p(\mathbb{T})$ изучались еще до появления понятия K-замкнутости (по поводу истории вопроса см. [6]). Рассмотрение безвесового случая при $n = 2$ было завершено несколько позже, статьей [11]. В ней был решен самый сложный случай $p = \infty$. В случае $n \geq 3$ "мягкими" методами решен вопрос K-замкнутости для $r, p < \infty$ (см. [2]), а вот при $p = \infty$ ничего не понятно уже даже для $n = 3$.

Перед тем как начать говорить о проблемах K-замкнутости весовых пространств Харди, напомним еще одно определение. Мы говорим, что вес $w : \mathbb{T} \to (0, +\infty)$ удовлетворяет условию Макенхаупта A_p, $1 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(t)dt\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(t)^{\frac{1}{1-p}}dt\right)^{p-1} \leq C < \infty$$

для любой дуги B. Вес w удовлетворяет условию A_1 тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{|B|}\int_B w(t)dt \leq Cw(x),$$

для любой дуги B и для любого $x \in B$. Вес w удовлетворяет A_∞ тогда и только тогда, когда w удовлетворяет какому-нибудь A_p для $1 \leq p < \infty$. При этом наилучшие константы C, фигурирующие в правых частях неравенств, принято называть A_p-константами, а вместо "w удовлетворяет условию A_p" иногда пишут $w \in A_p$. Когда мы говорим о весах двух переменных $w : \mathbb{T}^2 \to (0, \infty)$, условия A_p определяются так же, только вместо дуг символ B будет обозначать множества вида $B_1 \times B_2$, где B_1, B_2 — дуги.

Некоторые весовые результаты о K-замкнутости пространств Харди в пространствах Лебега могут быть легко получены из соответствующих безвесовых результатов, наложением на вес соответствующих ситуации условий Макенхаупта A_p, но такие условия часто являются слишком ограничительными.

Толчком к изучению интерполяции (в основном в форме K-замкнутости) весовых пространств Харди при минимальных ограничениях на веса в случае одной переменной стало возникновение этого вопроса в контексте доказательства теоремы Гротендика для пространства, сопряженного к диск-алгебре (диск-алгебра — это замыкание аналитических полиномов в норме пространства непрерывных функций на окружности), см. подробнее в обзоре [10]. В результате такие условия были найдены. Верна следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $w_1, w_2 : \mathbb{T} \to (0, +\infty)$ — веса, для которых выполнено $\log w_1(\cdot) \in L^1(\mathbb{T})$, $\log w_2(\cdot) \in L^1(\mathbb{T})$. Пусть $0 < r < p \leq \infty$. Тогда пара пространств $(H^r(w_1(\cdot)), H^p(w_2(\cdot)))$ K-замкнута в паре $(L^r(w_1(\cdot)), L^p(w_2(\cdot)))$ тогда и только тогда, когда $\log \frac{w_1^{1/r}(\cdot)}{w_2^{1/p}(\cdot)} \in BMO(\mathbb{T})$ (при $p = \infty$ условие на веса $\log w_1^{1/r}(\cdot) w_2(\cdot) \in BMO(\mathbb{T})$).*

Отметим, что условия $\log w_1(\cdot) \in L^1(\mathbb{T})$, $\log w_2(\cdot) \in L^1(\mathbb{T})$ являются скорее не ограничением применимости теоремы, а очерчивают обстоятельства, при которых не происходит вырождения в определении весовых пространств Харди. Кроме того, в случае $r = p$ теорема остается справедливой.

Остановимся ненадолго на этом вопросе. До настоящего момента мы так и не ввели определение весовых пространств Харди. Вообще говоря, это довольно сложный и тонкий вопрос: например для того, чтобы дать определение, аналогичное данному выше для безвесовых пространств Харди, нам нужно было бы, чтобы аналитические полиномы, чье замыкание мы берем, лежали в $H^p(w)$, для чего нужно было бы требовать $w \in L^1(\mathbb{T}^n)$, а это может быть слишком ограничительным условием. Но в случае одной переменной этот вопрос решается довольно простым и естественным образом. Для веса $w : \mathbb{T} \to (0, \infty)$ с суммируемым логарифмом (а мы, как уже говорилось выше, рассматриваем только такие веса), находим внешнюю функцию u такую, что $|u| = w$; тогда можем определить $H^p(w) = \left\{ f/u^{\frac{1}{p}} \,\middle|\, f \in H^p(\mathbb{T}) \right\}$ с нормой $\|g\|_{H^p(w)} = \left\| g u^{\frac{1}{p}} \right\|_{H^p(\mathbb{T})}$. В случае $n = 2$, который будет рассматриваться в дальнейшем, при $0 < p < \infty$ мы будем использовать следующее определение: будем рассматривать веса $w : \mathbb{T}^2 \to (0, \infty)$ следующего вида $w(z_1, z_2) = a(z_1)u(z_1, z_2)b(z_2)$, где $u \in L^1(\mathbb{T}^2)$, а у функций a и b суммируемые логарифмы (пусть $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$ внешние функции, построенные по a и b), тогда определяем $H^p(w) = \left\{ f/(ab)^{\frac{1}{p}} \,\middle|\, f \in H^p(u(\cdot, \cdot)) \right\}$ с нормой, задаваемой соотношением $\|g\|_{H^p(w)} = \left\| g(\widetilde{a}\widetilde{b})^{\frac{1}{p}} \right\|_{H^p(u(\cdot,\cdot))}$, где $H^p(u(\cdot, \cdot))$ определяется как замыкание аналитических полиномов в $L^p(u(\cdot, \cdot))$-норме, взятое с этой же нормой. Для произвольного веса (с суммируемым логарифмом) $w : \mathbb{T}^2 \to (0, \infty)$, пространство $L^\infty(w(\cdot, \cdot))$ мы понимаем как

$$L^\infty(w(\cdot, \cdot)) := \left\{ f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C} \,\middle|\, \text{ess sup}\left\{ f(z_1, z_2)/w(z_1, z_2) \,\middle|\, (z_1, z_2) \in \mathbb{T}^2 \right\} < \infty \right\},$$

взятое с естественной нормой. Пространство $H^\infty(w(\cdot, \cdot))$ для веса w вида $w(z_1, z_2) = a(z_1)u(z_1, z_2)b(z_2)$, где $u \in L^1(\mathbb{T}^2)$, а у функций a и b суммируемые логарифмы, определяем как аннулятор пространства $L_1^P(w)$, которое, в свою очередь, определяется аналогично $H_1(w)$, только с заменой аналитических многочленов на многочлены со спектром во множестве $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\cup\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, (множество функций со спектром в $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\cup\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ мы будем обозначать символом ⚑). Отметим, что трюк с внешними функциями в данной ситуации также применим, так как принадлежность функции ⚑ инвариантна относительно домножения на аналитические функции. Двойственность, которую мы только что использовали и будем продолжать использовать всегда в дальнейшем, это $\int f\bar{g}$. При таком определении двойственности и пространства $L^\infty(w(\cdot, \cdot))$ верно $L^1(w(\cdot, \cdot))^* = L^\infty(w(\cdot, \cdot))$.

Для интерполяции пространств Харди двух переменных к настоящему времени была установлена следующая теорема (она доказана в [5]).

Теорема 2. *Пусть* $1 < r < \infty$*; веса имеют вид* $w_1(z_1, z_2) = a_1(z_1)b_1(z_2)$, $w_2(z_1, z_2) = a_2(z_1)b_2(z_2)$*, где функции* a_i*,* b_i *такие, что выполнено условие* $\log a_i(\cdot), \log b_i(\cdot) \in BMO(\mathbb{T})$*. Тогда пара* $(H^r(w_1(\cdot,\cdot)), H^\infty(w_2(\cdot,\cdot)))$ *будет* K*-замкнута в паре* $(L^r(w_1(\cdot,\cdot)), L^\infty(w_2(\cdot,\cdot)))$*.*

Отметим, что, на самом деле, в оригинальной теореме вместо условия на принадлежность самих логарифмов весов к $BMO(\mathbb{T})$, фигурируют условия с логарифмами отношений весов, аналогичные условиям из теоремы 1. Таким образом аналог одномерного условия оказывается достаточным, когда вес $w(\cdot,\cdot)$ разделяется в произведение двух весов от одной переменной.

В данной работе мы, во-первых, хотели показать, что при некоторых условиях на функцию $u(\cdot,\cdot)$, аналог теоремы 2 будет верен для весов вида $w(z_1, z_2) = a(z_1)u(z_1, z_2)b(z_1)$. Наш основной результат на эту тему изложен в следующей теореме.

Теорема 3. K*-замкнутость пары*

$$(H_p(a_1(z_1)u_1(z_1, z_2)b_1(z_2)), H_\infty(a_2(z_1)u_2(z_1, z_2)b_2(z_2)))$$

в паре

$$(L_p(a_1(z_1)u_1(z_1, z_2)b_1(z_2)), L_\infty(a_2(z_1)u_2(z_1, z_2)b_2(z_2)))$$

имеет место при следующих условиях:

1) u_1 *удовлетворяет двумерному* A_p*,*

2) u_2 *удовлетворяет двумерному* A_1*,*

3) $\log(a_i), \log(b_i) \in BMO$*,*

4) $u_2^p u_1$ удовлетворяет A_∞ по второй переменной равномерно (в смысле равномерной константы в обратном неравенстве Гельдера),

Заметим, что вышеописанная теорема несколько отличается от представленной в соответствующем разделе. Мы специально разместили здесь версию с более простыми условиями, хотя и не в максимальной доказанной нами общности. Вывести теорему 3 из теоремы 8 читатель сможет без труда.

Во-вторых, соединив идеи из [2] и [3], мы доказали следующее весовое утверждение для случая $n = 2$ и $0 < r \leq 1 < p < \infty$.

Теорема 4. *Если веса $w_1(\cdot,\cdot)$, $w_2(\cdot,\cdot)$ удовлетворяют условиям*

$$w_1(\cdot,\cdot) \in A_\infty, \qquad w_2(\cdot,\cdot) \in A_p,$$

то пара $(H^r(w_1(\cdot,\cdot)), H^p(w_2(\cdot,\cdot)))$ K-замкнута в $(L^r(w_1(\cdot,\cdot)), L^p(w_2(\cdot,\cdot)))$.

Заметим опять, что в соответствующем разделе доказана несколько более сильная теорема, а вышеприведенный результат выбран как основной, поскольку его легче использовать. Кроме того, похожую теорему, по-видимому, можно сформулировать и для любой размерности n, но в данной работе мы ограничились случаем $n = 2$.

Наконец, используя вместе предыдущие два результата, мы получили методом "склейки трех шкал" следующую теорему, аналогичную общему одномерному результату о K-замкнутости подпространств, порожденных сингулярными интегральными проекторами, сформулированному в [1].

Теорема 5. *Если $w_1, w_2 \in A_1$ и $w_1 w_2 \in A_\infty$, то пара*

$$(H_1(w_1(z_1, z_2)), H_\infty(w_2(z_1, z_2)))$$

K-замкнута в паре

$$(L_1(w_1(z_1, z_2)), L_\infty(w_2(z_1, z_2)))\,.$$

В работе, помимо введения и заключения, три параграфа. §2 содержит результаты о K-замкнутости в окрестности единицы: то есть при $0 < r \le 1 < p < \infty$. В нем будет доказана теорема 4. В §3 рассматривается случай $1 < r < p = \infty$, доказывается теорема 3. В §4 из результатов §2 и §3 выводится теорема 5, про случай $r = 1, p = \infty$.

Добавим еще пару слов об обозначениях, которые проходят сквозь всю работу.

В дальнейшем нам несколько раз нужно будет говорить о классах функций со спектром в определенном координатном угле, поэтому мы вводим для них специальные символы, а именно:

которые читаются так: функции, спектр которых лежит в закрашенной черным области (черные линии, где видны, символизируют собой координатные оси, они добавлены для удобства). Ось абсцисс будет всегда отвечать первой переменной, ось ординат — второй. Включать или не включать функции со спектром на границе будет ясно из контекста, в котором символ используется.

Для того, чтобы несколько уменьшить громоздкость выкладок, мы вводим символы $\lesssim$ и $\gtrsim$, которые будут обозначать оценки с константами, значение которых нас не интересует. То есть обозначение $A \lesssim B$ значит, что выполнено $A \le CB$ для некоторой положительной константы C.

Символом μ будем обозначать нормированную меру Лебега на одномерном торе (то есть такую, что $\mu(\mathbb{T}) = 1$). Для $X \subseteq \mathbb{T}$ запись $(w\mu)(X)$ будет обозначать $\int_X w$, то есть весовую меру множества X.

Кроме этого, нам будут встречаться (на самом деле однажды уже встречались) обозначения вида X^Q, где X — какая-то квази-банахова решетка измеримых функций, а Q некоторый проектор. При этом Q не обязан действовать в пространстве X: если он все же действует в X, то, стандартным образом, $X^Q = \{f \in X \,|\, Qf = f\}$, если же нет, то мы будем фиксировать за проектором Q некоторое линейное подпространство $D \subseteq X$ (в реальных случаях оно, чаще всего, будет плотным), на котором Q определен и принимает значения в X, а пространство X^Q определять как $Clos\{f \in D \,|\, Qf = f\}$ (то, что Q проектор, в последнем случае понимается как $Q^2 = Q$ на множестве D). Введем сразу важнейший для §3 оператор P. Это проектор на ▜; более точно, он действует на тригонометрические многочлены двух переменных, зануляя коэффициенты при степенях в множестве $(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \times (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$. Теперь, следуя приведенной общей конструкции, можем определить решетку $L_s^P(u(\cdot,\cdot))$, где $u \in L^1(\mathbb{T}^2)$, $s < \infty$ (в роли множества D, как и всегда для проектора P, будет выступать множество тригонометрических многочленов). Но все же таким образом мы не можем определить $L_s^P(w(\cdot,\cdot))$, где w вида $w(z_1, z_2) = a(z_1)u(z_1, z_2)b(z_2)$, $s < \infty$, функция $u \in L^1(\mathbb{T}^2)$, а у функций a и b суммируемые логарифмы. Случай $s = \infty$, исключенный здесь нами, получается из соображений двойственности, как это уже было сделано на несколько абзацев выше, в этом абзаце мы более не будем его обсуждать. Чтобы справиться с весами вида $w(z_1, z_2) = a(z_1)u(z_1, z_2)b(z_2)$, мы определяем пространство $L_s^P(w(\cdot,\cdot))$ как $\left\{\widetilde{a}^{-1/s}\widetilde{b}^{-1/s} f \,\middle|\, f \in L_s^P(u(\cdot,\cdot))\right\}$ с нормой $\|g\|_{L_s^P(w)} = \left\|g a^{1/s} b^{1/s}\right\|_{L_s^P(u)}$, где, как и раньше, $\widetilde{a}, \widetilde{b}$ — внешние функции с $|\widetilde{a}| = a$, $\left|\widetilde{b}\right| = b$. В чисто-решеточных терминах это выглядит так: мы взяли решетку $X = L^s$, затем добавили к ней вес $u^{-1/s}$, получив $X(u^{-1/s})$, после этого взяли подпространство, "вырезанное" проектором P, заданным на многочленах, получили $(X(u^{-1/s}))^P$, после чего добавили к получившейся решетке дополнительный вес $(\widetilde{a}\widetilde{b})^{-1/s}$, получив решетку $(X(u^{-1/s}))^P((\widetilde{a}\widetilde{b})^{-1/s})$.

Заметим также, что обозначения весов в дальнейшем могут отличаться от использованных в формулировках теорем выше. В основном, это сделано для того, чтобы читателю было легче сравнивать доказательства некоторых теорем-обобщений с их прообразами, выделять новые идеи.

Наконец, хочется отметить, что тонкий вопрос определения пространств Харди здесь можно было бы вовсе обойти, потребовав, чтобы все веса были ограничены и отделены от нуля. В таком случае, они (пространства) определяются естественно и недвусмысленно, а результаты теорем имеют ценность, состоящую в том, что все полученные оценки будут зависеть только от A_p-констант и BMO-норм логарифмов весов, а не их (весов) существенных супремумов и инфимумов.

§2 K-замкнутость при $0 < r \le 1 < p < \infty$

Теорема 6. *Если веса $w_1(\cdot,\cdot)$, $w_2(\cdot,\cdot)$ удовлетворяют условиям*

1) *существует такое число $l \ge 1$, что $w_1(z_1,\cdot) \in A_l$ равномерно (т.е. “A_l-константа” ограничена как функция от z_1),*

2) *$w_2(z_1,\cdot) \in A_p$ равномерно (в том же смысле),*

3) *существует такое число $m \ge 1$, что $w_1(\cdot,z_2), w_2(\cdot,z_2) \in A_m$ равномерно (т.е. “A_m-константа” ограничена как функция от z_2),*

то пара $(H^r(w_1(\cdot,\cdot)), H^p(w_2(\cdot,\cdot)))$ K-замкнута в $(L^r(w_1(\cdot,\cdot)), L^p(w_2(\cdot,\cdot)))$.

Замечание. Хватит, например, такого более обозримого (но более обременительного) условия:

$$w_1(\cdot,\cdot) \in A_\infty, \qquad w_2(\cdot,\cdot) \in A_p,$$

где, подчеркнем, фигурирующие выше условия A_s — двумерные. Это и составляет существо упомянутой во введении теоремы 4.

Доказательство. Пусть $f = g + h$, где $f \in H^r(w_1(\cdot,\cdot)) + H^p(w_2(\cdot,\cdot))$ и $g \in L^r(w_1(\cdot,\cdot))$, $h \in L^p(w_2(\cdot,\cdot))$. Так как, по условию, все веса удовлетворяют каким-то условиям Макенхапута равномерно по второй переменной, то для любого фиксированного значения $z_1 \in \mathbb{T}$ пространства $L^r(w_1(z_1,\cdot))$, $L^p(w_2(z_1,\cdot))$ являются BMO-регулярными квази-банаховыми решетками измеримых функций. Отсюда, вследствие общей теории (она изложена, например, в [6]), мы можем сделать разложение функции f аналитическим по второй переменной. Получим $f = g' + h'$, где $g' \in$ [illegible], $h' \in$ [illegible] и выполнено $\|g'\|_{L^r(w_1(\cdot,\cdot))} \lesssim \|g\|_{L^r(w_1(\cdot,\cdot))}$, $\|h'\|_{L^p(w_2(\cdot,\cdot))} \lesssim \|h\|_{L^p(w_2(\cdot,\cdot))}$.

Замечание: Второй раз проделать тот же самый трюк нам мешает то, что полученные пространства $L^r(w_1(\cdot,\cdot))_A, L^p(w_2(\cdot,\cdot))_A$ не являются квази-банаховыми решетками измеримых функций, так как не удовлетворяет условию $f \in X, |g| \leq |f| \implies g \in X$. Индекс A означает подпространство, состоящее из функций, аналитических по одной из переменных (в нашем случае по второй), это обозначение взято из [6]. По поводу определения и свойств "квази-банаховых решеток измеримых функций" лучше всего см. [8], хотя понятие является классическим и хорошо раскрыто в книге [20] (хотя оно там и не имеет нашего названия). Но все-таки эти пространства можно "записать" как квази-банаховы решетки измеримых функций, перейдя к коэффициентам разложения функций по общему безусловному базису, в этом-то и состоит главная идея доказательства.

Теорема 3.10 из [3], благодаря условиям Макенхаупта, наложенным на веса по второй переменной, дает нам то, что для достаточно больших k, k-сплайновые вейвлеты одновременно образуют безусловный базис в пространствах $ReH^r(w_1(z_1,\cdot))$ и $ReH^p(w_2(z_1,\cdot))$ (с зафиксированной первой переменной). Нужно заметить, что в [3] речь идет о вещественных пространствах Харди на $\mathbb{R}$. Переход от $ReH(\mathbb{R})$ к $ReH(\mathbb{T})$, как замечают сами авторы, осуществляется простой заменой обозначений. Таким образом, модифицированная для тора теорема из [3] устанавливает наличие безусловного базиса (периодических) сплайновых вейвлетов в весовых ReH^r, $r \leq 1$ и L^p, $p > 1$, так как $ReH^p = L^p$ при $p > 1$ (последнее соотношение верно для весовых пространств в силу теоремы 1 на странице 86 в [17]). Уточним, пользуясь случаем, используемое определение (ниже ϕ_r — ядра Пуассона, а f — комплекснозначные распределения на $\mathbb{T}$)

$$ReH^s(w(\cdot)) = \{f \mid f * \phi_r \in L^s(w(\cdot)),\ 0 < r < 1\}$$

с комплексными скалярами и нормой $\|f\|_{ReH^p(w(\cdot))} = \left\|(\sup\limits_{0<r<1} |f * \phi_r|)(\cdot)\right\|_{L^p(w(\cdot))}$.

Нам понадобится также определить некое вспомогательное пространство $ReH_2^s(w(\cdot,\cdot))$, состоящее из функций $f : \mathbb{T} \to D'$ (D' обозначает распределения на торе), получающееся как замыкание по норме (в случае $s \geq 1$) или квази-норме (в случае $s < 1$)

$$\left(\int \|f(z_1)\|^s_{ReH^s(w(z_1,\cdot))} dz_1\right)^{\frac{1}{s}}$$

множества конечных комбинаций вида $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(z_1)\chi_i(z_2)$, где $\{a_i(\cdot)\}$ -ограниченные измеримые функции.

Докажем техническую лемму, которая позволит нам перемещаться между пространствами $L^s(w(\cdot,\cdot))_A$ и $ReH_2^s(w(\cdot,\cdot))$.

Лемма. *Если вес $w : \mathbb{T} \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию A_∞, выполнено $r \leq 1$, то для аналитических функций на $\mathbb{T}$ (аналитичность понимается в смысле спектра) нормы $L^r(w)$ и $ReH^r(w)$ эквивалентны.*

Замечание. В реальности, нам нужна будет эквивалентность норм в пространствах $L^r(u(z_1,\cdot))$ и $ReH^r(u(z_1,\cdot))$, для которой константы эквивалентности не зависят от переменной z_1. В таком случае надо будет требовать A_∞ в следующем смысле. Нужно, чтобы существовало такое число $\alpha < \infty$, что для любого z_1 вес $u(z_1,\cdot)$ удовлетворяет условию A_α, причем A_α-константу можно выбрать не зависящей от z_1.

Доказательство. Пусть $ReH_+^r(w)$ — такое подпространство пространства $ReH^r(w)$, что у всех его элементов коэффициенты Фурье с отрицательными номерами равны нулю (то есть $ReH_+^r(w)$ это подпространство, состоящее из аналитических, в смысле спектра, распределений).

Сворачивая распределения из пространства $ReH^r_+(w)$ с ядром Пуассона, будем получать функции в $H^r(w,\mathbb{D})$, пространстве функций, аналитических в круге, с ограниченными весовыми средними значениями по концентрическим окружностям. Такое преобразование является изоморфизмом.

Теперь берем радиальные пределы получившихся функций в круге. Такое отображение также будет изоморфизмом. Действительно, норма граничной функции оценивается через норму в $H^r(w,\mathbb{D})$, благодаря лемме Фату. Докажем на плотном множестве, состоящем из "хороших" функций (можно взять на эту роль пересечение с $ReH^r_+(w)$ какого-нибудь из плотных в ReH^r множеств, состоящих из гладких функций), обратную оценку

$$\sup_{0<\rho<1}\left(\int |(f*\phi_\rho)(z)|^r w(z)dz\right)^{\frac{1}{r}} \lesssim \|f\|_{L^r(w)}.$$

Выберем натуральное число m так, чтобы $rm>\alpha$, где α такое, что w удовлетворяет условию A_α (такое α существует, так как вес удовлетворяет условию A_∞). Заметим, что при таком выборе m, ядро Пуассона будет действовать в $L^{rm}(w)$. Профакторизуем функцию f в произведение bu внутренней и внешней функций (будет выполнено $|u|=|f|$). Тогда

$$\sup_{0<\rho<1}\left(\int |(f*\phi_\rho)(z)|^r w(z)dz\right)^{\frac{1}{r}} \le \sup_{0<\rho<1}\left(\int |(u*\phi_\rho)(z)|^r w(z)dz\right)^{\frac{1}{r}} =$$
$$= \sup_{0<\rho<1}\left(\int \left|(u^{\frac{1}{m}}*\phi_\rho)(z)\right|^{rm} w(z)dz\right)^{\frac{1}{r}} \lesssim$$
$$\lesssim \left\|u^{\frac{1}{m}}\right\|^m_{L^{rm}(w)} = \|u\|_{L^r(w)}. = \|f\|_{L^r(w)}.$$

Таким образом, получили желаемый изоморфизм.

При этом, если мы начинали с настоящей функции, а не с распределения, то и придем к той же самой функции, а норма будет уже другая. Лемма доказана. □

Имеем, благодаря лемме, $g' \in ReH_2^r(w_1(\cdot,\cdot))$, $h' \in ReH_2^p(w_2(\cdot,\cdot))$,

$$\|g'\|_{ReH_2^r(w_1(\cdot,\cdot))} \lesssim \|g'\|_{L^r(w_1)}, \qquad \|h'\|_{ReH_2^p(w_2(\cdot,\cdot))} \lesssim \|h'\|_{L^p(w_2)}.$$

Причем соотношения для g' не вытекают из леммы, а верны непосредственно, так как в этом случае пространство $ReH_2^p(w_2(\cdot,\cdot))$ "вырождается" в $L^p(w_2)$.

Пусть $\{\chi_k(\cdot)\}_{k\in\mathbb{N}}$ — тот самый базис (аргументом функций χ_k всегда будет z_2, заметим, что χ_k это не распределения, а функции). Теперь получим некую характеризацию нашего пространства $L^p(w_2(\cdot,\cdot))$.

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_i(z_1)\chi_i(z_2)\right\|_{L^p(w_2(\cdot,\cdot))} \underset{(1)}{\sim} \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i(z_1)\chi_i(z_2)\right\|_{L^p(w_2(\cdot,\cdot))} =$$

$$= \int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)a_i(z_1)\chi_i(z_2)\right\|_{L^p(w_2(\cdot,\cdot))} dt \underset{(2)}{\sim}$$

$$\underset{(2)}{\sim} \left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)a_i(z_1)\chi_i(z_2)\right\|^p_{L^p(w_2(\cdot,\cdot))} dt\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int_0^1\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)a_i(z_1)\chi_i(z_2)\right|^p w_2(z_1,z_2)dz_2dz_1dt\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)a_i(z_1)\chi_i(z_2)\right|^p w_2(z_1,z_2)dtdz_2dz_1\right)^{\frac{1}{p}} \underset{(3)}{\sim}$$

$$\underset{(3)}{\sim} \left(\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{i=1}^n |a_i(z_1)\chi_i(z_2)|^2\right)^{\frac{p}{2}} w_2(z_1,z_2)dz_2dz_1\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пояснения к пронумерованным переходам:

1. В силу безусловности базиса, которая означает ограниченность норм операторов $S_{N,\varepsilon}$ (ε — последовательность 1 и -1, $\chi_k^*(x)$ — коэффици-

ент при χ_k в разложении x по базису $\{\chi_i\}$),

$$S_{N,\varepsilon}(x) := \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \chi_k^*(x) \chi_k,$$

константой, не зависящей от ε, которая (ограниченность), фактически и установлена в [3]. Здесь ключевой является та самая "равномерность" условия Макенхаупта, которую мы требовали в условиях теоремы. Имея равномерность, можно увидеть, что нормы операторов по второй переменной $S_{N,\varepsilon}$, вообще говоря зависящие от переменной z_1, можно ограничить сверху константами, не зависящими от переменной z_1. Оценки снизу в данном случае получаются из оценок сверху, достаточно просто посмотреть на определение операторов $S_{N,\varepsilon}$.

2. Неравенство Кахана ("векторное" неравенство Хинчина, см. [18] стр. 95). Отметим, что хотя неравенство Кахана обычно формулируется только для банаховых пространств, доказать его для квази-банаховых пространств не составляет труда.

3. Скалярное неравенство Хинчина.

Таким образом $ReH_2^p(w_2(\cdot,\cdot))$ изоморфно (ниже $\{a_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ — измеримые на $\mathbb{N} \times \mathbb{T}$)

$$X_p := \left\{ \{a_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty} \,\middle|\, \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i(z_1)\chi_i(z_2)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \in L^p(w_2(\cdot,\cdot)) \right\}.$$

Проделаем нечто похожее для пространства $ReH_2^r(w_1(\cdot,\cdot))$. Как и в прошлый раз эквивалентность норм будем проверять только для конечных сумм вида $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(z_1)\chi_i(z_2)$, мы можем так делать потому, что они плотны в рассматриваемом пространстве. Здесь это будет играть существенную роль, так как, воспользовавшись теоремой 4 на стр. 87 из [17] и гладкостью функций χ_k, будем заменять обычную норму $\left\| \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(z_1)\chi_i(z_2) \right\|_{ReH^r(w_1(z_1,\cdot))}$

на

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i(z_1)\chi_i(z_2)\right\|_{L^r(w_1(z_1,\cdot))} + \left\|H\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(z_1)\chi_i(z_2)\right)\right\|_{L^r(w_1(z_1,\cdot))}.$$

Приступим к выкладкам.

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i(z_1)\chi_i(z_2)\right\|^r_{ReH_2^r(w_1(\cdot,\cdot))} \sim \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i(z_1)\chi_i(z_2)\right\|^r_{ReH_2^r(w_1(\cdot,\cdot))} =$$

$$= \int\int\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) a_i(z_1)\chi_i(z_2)\right|^r w_1(z_1,z_2)dz_2dz_1 +$$

$$+ \int\int\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) a_i(z_1)(H\chi_i)(z_2)\right|^r w_1(z_1,z_2)dz_2dz_1 \sim$$

$$\sim \int\int\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_i(z_1)\chi_i(z_2)\right|^2\right)^{\frac{r}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_i(z_1)(H\chi_i)(z_2)\right|^2\right)^{\frac{r}{2}}\right) w_1(z_1,z_2)dz_2dz_1.$$

Таким образом $ReH_2^r(w_1(\cdot,\cdot))$ изоморфно (ниже $\{a_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ — измеримые на $\mathbb{N}\times\mathbb{T}$)

$$X_r := \left\{\{a_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}\ \middle|\ \left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_i(z_1)\chi_i(z_2)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_i(z_1)(H\chi_i)(z_2)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \in L^r(w_1)\right\}.$$

Несложно увидеть, что оба получившихся пространства уже будут квази-банаховыми решетками измеримых функций.

Проверим, что решетка X_p является BMO-регулярной. Для этого докажем, что оператор гармонического сопряжения H действует в $(X_p)^\alpha$ (α-конвексификации решетки X_p, определение можно найти в [6]).

Оценка, которую мы пытаемся получить, выглядит так:

$$\int\limits_{\mathbb{T}}\int\limits_{\mathbb{T}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|(Ha_i)(z_1)|^{2\alpha}|\chi_i(z_2)|^2\right)^{\frac{p}{2}}w_2(z_1,z_2)dz_1dz_2 \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{\mathbb{T}}\int\limits_{\mathbb{T}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i(z_1)|^{2\alpha}|\chi_i(z_2)|^2\right)^{\frac{p}{2}}w_2(z_1,z_2)dz_1dz_2.$$

Ее несложно получить, воспользовавшись условием 3. Действительно,

$$\int\limits_{\mathbb{T}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|(Ha_i)(z_1)|^{2\alpha}|\chi_i(z_2)|^2\right)^{\frac{p}{2}}w_2(z_1,z_2)dz_1 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|(H(a_i|\chi_i(z_2)|^{\frac{1}{\alpha}}))(z_1)\right|^{2\alpha}\right)^{\frac{p}{2}}w_2(z_1,z_2)dz_1 \le \ldots$$

Как известно, H — оператор Кальдерона-Зигмунда на пространстве $L^{p\alpha}(l^{2\alpha})$, так что, в силу условия 3 (нужно выбрать α так, чтобы $p\alpha$ было больше m), можем продолжить выкладку выше

$$\cdots \le C(z_1)\int\limits_{\mathbb{T}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_i(z_1)|\chi_i(z_2)|^{\frac{1}{\alpha}}\right|^{2\alpha}\right)^{\frac{p}{2}}w_2(z_1,z_2)dz_1 \le$$

$$\le C\int\limits_{\mathbb{T}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i(z_1)|^{2\alpha}|\chi_i(z_2)|^2\right)^{\frac{p}{2}}w_2(z_1,z_2)dz_1.$$

Выше мы также, пользуясь равномерностью наложенного условия Макенхаупта, заменили константу $C(z_1)$ на независимую от z_1 константу C. Осталось лишь проинтегрировать полученную оценку по переменной z_2. Теперь BMO-регулярность доказана.

BMO-регулярность второй решетки доказывается точно так же.

Возвратимся к нашим разложениям. Снова используя общую теорию, можем сделать коэффициенты $a_i(\cdot)$ аналитическими функциями. Таким образом получим разложение $f = g'' + h''$, где g'' и h'' лежат в соответствующих $ReH_2^s(w_i(\cdot,\cdot))$, имеют аналитические коэффициенты в разложении по базису $\{\chi_i(\cdot)\}$, и их $ReH_2^s(w_i(\cdot,\cdot))$ нормы нужным образом оцениваются через $ReH_2^s(w_i(\cdot,\cdot))$ нормы g' и h'. Заметим, что коэффициенты g'' и h'' были получены из g', h' домножением на некоторую функцию переменной z_1 (так работает "общая теория"), так что g'' и h'' так и остались аналитическими по второй переменной. Использовав еще раз лемму, заканчиваем доказательство. $\square$

§3 K-замкнутость при $r > 1$, $p = \infty$

Как известно, K-замкнутость пары

$$(H_p(b_1(z_1)w_1(z_1,z_2)a_1(z_2)), H_\infty(b_2(z_1)w_2(z_1,z_2)a_2(z_2)))$$

в паре

$$(L_p(b_1(z_1)w_1(z_1,z_2)a_1(z_2)), L_\infty(b_2(z_1)w_2(z_1,z_2)a_2(z_2)))$$

эквивалентна K-замкнутости соответствующей пары "преданнуляторов" в соответствующей паре предсопряженных пространств. То есть K-замкнутости пары

$$\left(L_1^P(\widetilde{b}_1(z_1)\widetilde{w}_1(z_1,z_2)\widetilde{a}_1(z_2)), L_q^P(\widetilde{b}_2(z_1)\widetilde{w}_2(z_1,z_2)\widetilde{a}_2(z_2))\right)$$

в паре

$$\left(L_1(\widetilde{b}_1(z_1)\widetilde{w}_1(z_1,z_2)\widetilde{a}_1(z_2)), L_q(\widetilde{b}_2(z_1)\widetilde{w}_2(z_1,z_2)\widetilde{a}_2(z_2))\right),$$

где пространства $L_s^P(w)$ были определены во введении, верно соотношение $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, а веса пересчитываются следующим образом:

$$\widetilde{b}_1(z_1) = b_2(z_1), \qquad \widetilde{w}_1(z_1,z_2) = w_2(z_1,z_2), \qquad \widetilde{a}_1(z_2) = a_2(z_2);$$

$$\widetilde{b}_2(z_1) = b_1^{1-q}(z_1), \qquad \widetilde{w}_2(z_1,z_2) = w_1^{1-q}(z_1,z_2), \qquad \widetilde{a}_2(z_2) = a_1^{1-q}(z_2).$$

В дальнейшем мы из соображений удобства не будем писать тильду над $b_1, w_1, a_1, b_2, w_2, a_2$, когда имеем дело с "преданнуляторами" и предсопряженными пространствами.

Переход от двух весов к одному весу и окаймленному оператору

Для начала заметим, что без ограничения общности можно считать, что $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = 1$, $b_2 = b$. Этого всегда можно добиться в самом начале, используя в исходной задаче домножение на нужные внешние функции.

Теперь, используя прием из [1] (стр 192), получаем, что вопрос K-замкнутости пары

$$\left(L_1^P(w_1(z_1,z_2)a(z_2)), L_q^P(b(z_1)w_2(z_1,z_2)a(z_2))\right)$$

в паре

$$(L_1(w_1(z_1,z_2)a(z_2)), L_q(b(z_1)w_2(z_1,z_2)a(z_2)))$$

эквивалентен вопросу о K-замкнутости пары

$$\left(L_1^{P^u}(w(z_1,z_2)a(z_2)), L_q^{P^u}(b(z_1)w(z_1,z_2)a(z_2))\right)$$

в паре

$$(L_1(w(z_1,z_2)a(z_2)), L_q(b(z_1)w(z_1,z_2)a(z_2)))\,,$$

при $w = \frac{w_1^{\frac{q}{q-1}}}{w_2^{\frac{1}{q-1}}}$, $u = \frac{w_1^{\frac{1}{q-1}}}{w_2^{\frac{1}{q-1}}}$, $P^u f = u^{-1}P(uf)$. Тут нужно отметить, что используемые здесь $L^{P_u}(w)$ определяются "чисто решеточным" образом, так что нам нет необходимости накладывать какие-то дополнительные условия на w и u, чтобы такая запись имела смысл. Уточним, что если вспомнить "решеточный процесс", стоящий за определением пространств $L_s^P(w)$, то переход к окаймленному оператору будет совершен на втором шаге, перед добавлением "разделяющегося" веса, можно считать, что за окаймленным оператором закреплено плотное множество $u^{-1} \cdot D$, где D — множество тригонометрических многочленов.

Основная теорема

Теорема 7. *K-замкнутость* $\left(L_1^{P^u}(w(z_1,z_2)a(z_2)), L_q^{P^u}(b(z_1)w(z_1,z_2)a(z_2))\right)$ *имеет место, если*

0) $w_1(\cdot,\cdot), w_2(\cdot,\cdot) \in L^1(\mathbb{T}^2)$ *(техническое требование для корректности наших определений),*

1) $w = \frac{w_1^{\frac{q}{q-1}}}{w_2^{\frac{1}{q-1}}}$ *удовлетворяет условию* A_∞ *по второй переменной равномерно (под равномерностью мы здесь понимаем существование константы в обратном неравенстве Гельдера, не зависящей от первой переменной),*

2) w_1 *удовлетворяет условию* A_1 *по второй переменной равномерно,*

3) $\log(a), \log(b) \in BMO$*,*

4) $\log(w(\cdot, z_2))$ *лежит в пространстве BMO по первой переменной равномерно.*

5) $w_2 \in A_q$ *равномерно по второй переменной,*

Замечание. Кажется, что при вышеуказанных условиях вес b является избыточным, что его можно считать частью веса w и все условия будут удовлетворены. Это иллюзия, ведь при определении пространств Харди двух переменных мы сразу же наложили условие, заставляющее все "неразделяющиеся" веса двух переменных лежать в $L^1(\mathbb{T}^2)$.

Доказательство. Введем обозначения:

$$Y_1 := L_1^{P^u}(w(z_1,z_2)a(z_2)), \qquad Y_2 := L_q^{P^u}(b(z_1)w(z_1,z_2)a(z_2)).$$

Пусть $Y_1 + Y_2 \ni f = g + h$, где $g \in L_1(w(z_1, z_2)a(z_2))$, $h \in L_q(b(z_1)w(z_1, z_2)a(z_2))$. Обозначим $\|g\|_{L_1(w(z_1,z_2)a(z_2))} =: A$, $\|h\|_{L_q(b(z_1)w(z_1,z_2)a(z_2))} =: B$ и будем искать такие функции $g' \in Y_1$, $h' \in Y_2$, что имеет место разложение $f = g' + h'$, и выполнено $\|g'\|_{L_1(w(z_1,z_2)a(z_2))} \lesssim A$, $\|h'\|_{L^q(b(z_1)w(z_1,z_2)a(z_2))} \lesssim B$.

Благодаря условию $\log a \in \mathrm{BMO}$, можем найти такой набор (“аналитическое разложение единицы, подчиненное весу a”) $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \subseteq H^\infty(\mathbb{T})$, что выполнено

$$|\phi_j|^{\frac{1}{8}} a \lesssim 2^j, \sum |\phi_j|^{\frac{1}{8}} 2^j \lesssim a$$
$$\sum |\phi_j|^{\frac{1}{8}} \le c, \sum \phi_j = 1.$$

Построение см. в [9].

Определим функции ψ_j из факторизационного соотношения $\phi_j = \theta_j \psi_j^8$, где θ_j — внутренняя функция, а ψ_j — внешняя. Имеем

$$f = \sum \theta_j \psi_j^4 f \psi_j^4 = \sum \theta_j \psi_j^4 g \psi_j^4 + \sum \theta_j \psi_j^4 h \psi_j^4,$$

а также $f\psi_j^4 = g\psi_j^4 + h\psi_j^4$, именно с этим разложением мы будем работать в ближайшее время.

Пусть P_2 — естественный проектор на ■. Можно считать, что это оператор, действующий на функцию $v(z_1, \cdot)$ как $(I - \mathfrak{R})$, где $\mathfrak{R}$ — это классический одномерный проектор Рисса (вопросов с измеримостью по двум переменным здесь не возникает). Уточним, что P_2 аннулирует все константы. Благодаря условиям 1 и 2, для любого фиксированного z_1 можем построить весовое разложение Кальдерона-Зигмунда для функции $g\psi_j^4$ по второй переменной для оператора P_2^u по уровню $\lambda(z_1)$, который мы выберем позже (точную формулировку используемой теоремы см. в [1] (стр. 191), а ее доказательство см. в [7] (стр. 761-763)), т.е. существуют такие функции $g_0^j(z_1, \cdot)$, $g_1^j(z_1, \cdot)$, и такое семейство множеств $\{\Omega_{z_1}^j\}_{z_1\in\mathbb{T}}$, что:

- $(g\psi_j^4)(z_1,\cdot) = g_0^j(z_1,\cdot) + g_1^j(z_1,\cdot)$,
- $\left|g_0^j(z_1,\cdot)\right| \lesssim \lambda_j(z_1)$,
- $\int\left|g_0^j(z_1,z_2)\right|w(z_1,z_2)dz_2 \lesssim \int\left|g\psi_j^4(z_1,z_2)\right|w(z_1,z_2)dz_2$
- $\int\left|g_1^j(z_1,z_2)\right|w(z_1,z_2)dz_2 \lesssim \int\left|g\psi_j^4(z_1,z_2)\right|w(z_1,z_2)dz_2$
- $\mathrm{supp}(g_1^j(z_1,\cdot)) \subseteq \Omega_{z_1}^j$, где $(w(z_1,\cdot)\mu)(\Omega_{z_1}^j) \lesssim \frac{\int\left|g\psi_j^4(z_1,z_2)\right|w(z_1,z_2)dz_2}{\lambda_j(z_1)}$,
- $\int\limits_{\mathbb{T}\setminus\Omega_{z_1}^j} |(P_2^u g_1^j)(z_1,z_2)|w(z_1,z_2)dz_2 \leq \int\left|g\psi_j^4(z_1,z_2)\right|w(z_1,z_2)dz_2$.

Здесь нужно заметить, что все константы, скрытые в оценках выше за символом "$\lesssim$", не зависят от переменной z_1. Это достигается благодаря требованию равномерности условий Макенхаупта для весов w и w_1 и специфики теоремы 4 из [7].

Займемся теперь определением чисел $\lambda_j(z_1)$. Пусть

$$y_j := \left(\int\left|(h\psi_j^4)(z_1,z_2)\right|^q w(z_1,z_2)dz_2\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Тогда, используя свойства аналитического разложения единицы, получим

$$\sum_j 2^j y_j(z_1)^q = \sum_j 2^j \int\left|(h\psi_j^4)(z_1,z_2)\right|^q w(z_1,z_2)dz_2 \lesssim$$
$$\lesssim \int|h(z_1,z_2)|^q\left(\sum_j 2^j|\psi_j|\right)w(z_1,z_2)dz_2 \lesssim$$
$$\lesssim \int|h(z_1,z_2)|^q w(z_1,z_2)a(z_2)dz_2,$$

откуда сразу видно, что

$$\left(\int\sum_j 2^j y_j(z_1)^q b(z_1)dz_1\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim B.$$

В левой части неравенства стоит норма последовательности $\{2^{\frac{j}{q}}y_j(\cdot)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ измеримых функций на $\mathbb{T}$ в решетке $L^q(l^q, b)$, которая (решетка) BMO-регулярна, так как $\log(b) \in \mathrm{BMO}$, так что мы можем найти такие функции $v_j \geq y_j$, что $\sup\limits_j \|\log v_j\|_{BMO} \leq c$ и $\left(\int \sum\limits_j 2^j v_j(z_1)^q b(z_1) dz_1\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim B$. Так как $\log(w(\cdot, z_2)) \in \mathrm{BMO}$ равномерно (по условию 4) и $\sup\limits_j \|\log v_j\|_{BMO} \leq c$, то, по лемме 7.2 из [8], можем найти такие функции $\daleth_j(z_1, z_2)$, что, во-первых, $v_j(z_1)w(z_1, z_2) \lesssim \daleth_j(z_1, z_2) \lesssim v_j(z_1)w(z_1, z_2)$, и, во-вторых, $\left|H(\daleth_j^{\frac{1}{k}})\right| \lesssim \daleth_j^{\frac{1}{k}}$ для какого-то числа $k \geq 2$ (с абсолютными константами внутри символа "$\lesssim$" и показателем k, не зависящем от индекса j, все благодаря равномерности).

Теперь, наконец,

$$\lambda_j(z_1) := \frac{v_j(z_1)^p}{\left(\int \left|(g\psi_j^4)(z_1, z_2)\right| w(z_1, z_2) dz_2\right)^{p-1}}.$$

Сразу же

$$\int \left|g_0^j(z_1, z_2)\right|^q w(z_1, z_2) dz_2 \lesssim \lambda_j(z_1)^{q-1} \int \left|(g\psi_j^4)(z_1, z_2)\right| w(z_1, z_2) dz_2 =$$
$$= v_j(z_1)^{p(q-1)} \left(\int \left|(g\psi_j^4)(z_1, z_2)\right| w(z_1, z_2) dz_2\right)^{1-(p-1)(q-1)} = v_j(z_1)^q,$$

то есть

$$\left(\int \left|g_0^j(z_1, z_2)\right|^q w(z_1, z_2) dz_2\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim v_j(z_1).$$

Теперь положим (используемые ниже функции Φ_j, аналитичные по первой переменной, мы выберем позже)

$$u_j := P_2^u(f\psi_j^4) = P_2^u(g_1^j) + P_2^u(g_0^j + h\psi_j^4),$$

$$\alpha_j := \Phi_j u_j - P_2^u(g_0^j + h\psi_j^4),$$
$$\Lambda := \sum_j \theta_j \psi_j^4 \alpha_j.$$

Тогда $f = \sum\limits_j \theta_j \psi_j^4 f \psi_j^4 = (\sum\limits_j \theta_j \psi_j^4 g_1^j - \Lambda) + (\sum\limits_j \theta_j \psi_j^4 (g_0^j + h\psi_j^4) + \Lambda) = g' + h'$, где g' и h' — искомые. Докажем это.

Проверим, что $P^u(h') = h'$ (утверждение $P^u(g') = g'$ сразу же последует из этого). Во-первых, легко убедиться в том, что

$$h' = (I - P_2^u)(g_0^j + h\psi_j^4) + \Phi_j P_2^u (f\psi_j^4).$$

Выше мы сразу исключили из h' сумму и множители $\theta_j \psi_j^4$, легко понять, что это не ограничивает общности. Более того, дальше мы будем считать, что h' оказалась функцией вида $u^{-1}v$, где v — тригонометрический многочлен, это предположение нас также нисколько не ограничивает, ведь распространение на общий случай легко получается из соображений плотности таких функций. Теперь просто формальным образом проверим принадлежность пространствам L^{P^u} для каждого слагаемого. Для проверки первого слагаемого достаточно провести прямое вычисление:

$$\begin{aligned}
&P^u(I - P_2^u)(g_0^j + h\psi_j^4) = u^{-1} P u u^{-1} (I - P_2) u (g_0^j + h\psi_j^4) = \\
&= u^{-1} P (I - P_2) u (g_0^j + h\psi_j^4) = \\
&\qquad\qquad = u^{-1} (I - P_2) u (g_0^j + h\psi_j^4) = (I - P_2^u)(g_0^j + h\psi_j^4).
\end{aligned}$$

Для проверки второго будем действовать немного иначе. Знаем, что выполнено $P^u(f) = f$, т.е. $P(uf) = uf$, т.е. $uf \in$ ▜, откуда очевидно, что верно $uf\psi_j \in$ ▜, следовательно $P_2(uf\psi_j) \in$ ▗, значит $\Phi_j P_2(uf\psi_j) \in$ ▐, откуда, наконец, $P^u \Phi_j P_2^u (f\psi_j) = u^{-1} P(\Phi_j P_2(uf\psi_j)) = u^{-1} \Phi_j P_2(uf\psi_j) = \Phi_j P_2^u (f\psi_j)$, что и требовалось доказать.

Теперь нужно проверить оценки. Для начала установим нужные оценки для членов, не содержащих Λ:

$$\left(\int\int\left|\sum\theta_j\psi_j^4(g_0^j+h\psi_j^4)\right|^q b(z_1)w(z_1,z_2)a(z_2)dz_2dz_1\right)^{\frac{1}{q}}\lesssim$$

$$\lesssim\left(\int\left(\sum\int 2^j\left|g_0^j+h\psi_j^4\right|^q w(z_1,z_2)dz_2\right)b(z_1)dz_1\right)^{\frac{1}{q}}\lesssim \qquad (\star)$$

$$\lesssim\left(\int\left(\sum 2^j v_j^q+\int\left(|h|^q\sum 2^j|\psi_j|w(z_1,z_2)dz_2\right)\right)b(z_1)dz_1\right)^{\frac{1}{q}}\lesssim$$

$$\lesssim\left(\int\sum 2^j v_j^q b(z_1)dz_1\right)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\left(\int\int|h|^q b(z_1)w(z_1,z_2)a(z_2)dz_2dz_1\right)^{\frac{1}{q}}\lesssim B. \quad (\star\star)$$

Аналогичным образом, но еще проще:

$$\int\int\left|\sum\theta_j\psi_j^4 g_1^j\right|w(z_1,z_2)a(z_2)dz_2dz_1\lesssim$$

$$\lesssim\int\int\sum\left|g_1^j\right||\psi_j|a(z_2)w(z_1,z_2)dz_2dz_1\lesssim$$

$$\lesssim\int\left(\sum 2^j\left(\int\left|g_1^j\right|w(z_1,z_2)dz_2\right)\right)dz_1\lesssim$$

$$\lesssim\int\left(\int|g|\sum 2^j|\psi_j|w(z_1,z_2)dz_2\right)dz_1\lesssim$$

$$\lesssim\int\int|g|w(z_1,z_2)a(z_2)dz_2dz_1=A.$$

Переходим к выбору функций Φ_j. Введем обозначение $r_j(z_1,z_2):=\daleth_j^{\frac{1}{k}}$, а также найдем такое число $s\in\mathbb{N}$, что $p/s<1$. Теперь:

$$\gamma_j(z_1,z_2):=\max\left\{1,\left(\frac{\left|(P_2^u g_1^j)(z_1,z_2)\right|}{\lambda_j(z_1)}\right)^{\frac{1}{ks}}\right\}$$

$$F_j:=\frac{r_j+iH(r_j)}{r_j\gamma_j+iH(r_j\gamma_j)},\qquad\qquad \Phi_j=1-(1-F_j^{ks})^k.$$

Тогда Φ_j — аналитичны по переменной z_1 (H здесь действует по z_1). Также выполнена оценка $|\Phi_j|\lesssim\frac{1}{\gamma_j^{ks}}$, так как

$$|F_j|=\left|\frac{r_j+iH(r_j)}{r_j\gamma_j+iH(r_j\gamma_j)}\right|\le\left|\frac{r_j+iH(r_j)}{r_j\gamma_j}\right|\lesssim\frac{|r_j|+|r_j|}{r_j\gamma_j}\lesssim\frac{1}{\gamma_j}\le 1,$$

$$|\Phi_j| = \left|-C_k^1 F_j^{ks} + C_k^2 F_j^{2ks} - \dots \pm C_k^k F_j^{k^2 s}\right| \underset{\text{т.к. } |F_j| \lesssim 1}{\lesssim} \left|F_j^{ks}\right| \lesssim \frac{1}{\gamma_j^{ks}},$$

а также имеет место $|\Phi_j|\left|P_2^u(g_1^j)\right| \lesssim \frac{\left|P_2^u(g_1^j)\right|}{\gamma_j^{ks}} \le \lambda_j(z_1)$. Все константы, скрытые здесь под символом "$\lesssim$", абсолютные в смысле независимости от индекса j.

Проверим неравенство $\left(\int\int|\Lambda|^q b(z_1)w(z_1,z_2)a(z_2)dz_2dz_1\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim B$. В силу оценки $\Phi_j \lesssim 1$, запишем

$$\left(\int\int|\Lambda|^q b(z_1)w(z_1,z_2)a(z_2)dz_2dz_1\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim$$
$$\lesssim \left(\int\int\left|\sum\theta_j\psi_j^4\Phi_j P_2^u(g_1^j)\right|^q b(z_1)w(z_1,z_2)a(z_2)dz_2dz_1\right)^{\frac{1}{q}} +$$
$$+ \left(\int\int\left|\sum\theta_j\psi_j^4 P_2^u(g_0^j + h\psi_j^4)\right|^q b(z_1)w(z_1,z_2)a(z_2)dz_2dz_1\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim$$
$$\lesssim \left(\int\int\sum 2^j\left|\Phi_j P_2^u(g_1^j)\right|^q b(z_1)w(z_1,z_2)dz_2dz_1\right)^{\frac{1}{q}} +$$
$$+ \left(\int\int\sum 2^j\left|P_2^u(g_0^j + h\psi_j^4)\right|^q b(z_1)w(z_1,z_2)dz_2dz_1\right)^{\frac{1}{q}} = I_1 + I_2$$

Чтобы оценить интеграл I_2, достаточно воспользоваться сильным типом (q,q) оператора P_2^u относительно веса w (наличие сильного типа (q,q) очевидно следует из условия 5), а далее провести рассуждения полностью совпадающие с "хвостом" (см. $\star - \star\star$) оценки, проделанной выше.

Чтобы оценить интеграл I_1, сначала оценим $\int\left|\Phi_j P_2^u g_1^j\right|^q w(z_1,z_2)dz_2$ для фиксированного значения z_1. Пусть

$$\rho_{j,z_1}(t) = (w(z_1,\cdot)\mu)\left\{z_2\,\middle|\,\left|\Phi_j P_2^u g_1^j\right| > t\right\},$$

тогда, в силу оценки $|\Phi_j|\left|P_2^u(g_1^j)\right| \le c\lambda_j(z_1)$ и слабого типа $(1,1)$ оператора

P_2^u относительно веса w, который получается из теоремы 4 из [7], имеем

$$\int \left|\Phi_j P_2^u g_1^j\right|^q w(z_1, z_2) dz_2 \lesssim \int\limits_0^{c\lambda_j(z_1)} t^{q-1}\rho_{j,z_1}(t)dt \lesssim$$

$$\lesssim \lambda_j(z_1)^{q-1} \int \left|g\psi_j^4\right| w(z_1, z_2) dz_2 =$$

$$= \left(\lambda_j(z_1) \left(\int \left|g\psi_j^4\right| w(z_1, z_2) dz_2\right)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}} \leq v_j(z_1)^{\frac{p}{p-1}} = v_j(z_1)^q$$

Отсюда видно, что

$$I_1 \lesssim \left(\int \sum 2^j v_j^q b(z_1) dz_1\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim B.$$

Осталось только проверить неравенство $\int\int |\Lambda| w(z_1, z_2) a(z_2) dz_2 dz_1 \lesssim A$. Легко видеть (подобное мы уже делали выше), что

$$\int\int |\Lambda| w(z_1, z_2) a(z_2) dz_2 dz_1 \lesssim \int \left(\sum 2^j \int \left|\Phi_j P_2^u(g_1^j)\right| w(z_1, z_2) dz_2 dz_1\right) +$$
$$+ \int \left(\sum 2^j \int |1 - \Phi_j| \left|P_2^u(g_0^j + h\psi_j^4)\right| w(z_1, z_2) dz_2 dz_1\right) = I_3 + I_4.$$

Оценим интеграл I_3. Для начала,

$$\int \left|\Phi_j P_2^u g_1^j\right| w(z_1, z_2) dz_2 \lesssim \lambda_j(z_1)(w(z_1, \cdot)\mu)(\Omega_{z_1}^j) +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{T}\setminus\Omega_{z_1}^j} |P_2^u g_1^j| w(z_1, z_2) dz_2 \lesssim \int \left|g\psi_j^4\right| w(z_1, z_2) dz_2,$$

откуда уже хорошо знакомым приемом получаем $I_3 \lesssim A$.

Вспомним неравенство $\left(\int \left|(h\psi_j^4)(z_1, z_2)\right|^q w(z_1, z_2) dz_2\right)^{\frac{1}{q}} \leq v_j(z_1)$ и неравенство $\left(\int \left|g_0^j(z_1, z_2)\right|^q w(z_1, z_2) dz_2\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim v_j(z_1)$, а также воспользуемся сильным типом (q,q) у оператора P_2^u относительно веса $w(z_1,\cdot)$, получим

$$I_4 \lesssim$$
$$\lesssim \int \left(\sum 2^j \left(\int |1-\Phi_j|^p w(z_1,z_2)dz_2 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int \left| P_2^u(g_0^j + h\psi_j^4) \right|^q w(z_1,z_2)dz_2 \right)^{\frac{1}{q}} dz_1 \right) \lesssim$$
$$\lesssim \int \left(\sum 2^j \left(\int |1-\Phi_j|^p w(z_1,z_2)dz_2 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int \left| g_0^j + h\psi_j^4 \right|^q w(z_1,z_2)dz_2 \right)^{\frac{1}{q}} dz_1 \right) \lesssim$$
$$\lesssim \int \left(\sum 2^j \left(\int |1-\Phi_j|^p w(z_1,z_2)dz_2 \right)^{\frac{1}{p}} v_j dz_1 \right)$$

Очевидно, что выполнено

$$|1-\Phi_j| = \left|1-F_j^{ks}\right|^k = |1-F_j|^k \left|1+F_j+F_j^2+\dots+F_j^{ks-1}\right|^k \lesssim |1-F_j|^k,$$
$$|1-F_j| = \left| \frac{r_j(\gamma_j-1)+iH(r_j(\gamma_j-1))}{r_j\gamma_j+iH(r_j\gamma_j)} \right| \lesssim \frac{\gamma_j-1}{\gamma_j} + \frac{|H(r_j(\gamma_j-1))|}{r_j},$$

последнее выражение равняется $\frac{|H(r_j(\gamma_j-1))|}{r_j}$ на множестве, где $\gamma_j = 1$, т.е. на множестве, где $\left|P_2^u g_1^j\right| \le \lambda_j(z_1)$. Отсюда

$$I_4 \lesssim \int \sum 2^j \left((w(z_1,\cdot)\mu) \left(\{ z_2 \,|\, \gamma_j(z_1,z_2) > 1 \} \right) \right)^{\frac{1}{p}} v_j(z_1)dz_1 +$$
$$+ \int \sum 2^j \left(\int \left| \frac{H(r_j(\gamma_j-1))^{kp}}{r_j^{kp}} \right| w(z_1,z_2)dz_2 \right)^{\frac{1}{p}} v_j(z_1)dz_1.$$

Вспоминая, что $r_j^k = \daleth_j$, $v_j(z_1)w(z_1,z_2)^{\frac{1}{p}} \lesssim \daleth_j(z_1,z_2) \lesssim v_j(z_1)w(z_1,z_2)^{\frac{1}{p}}$, а также пользуясь весовым слабым типом $(1,1)$ у оператора P_2^u (который, напомним, выводится из теоремы 4 статьи [7]), имеем

$$I_4 \lesssim \int \sum 2^j \lambda_j(z_1)^{-\frac{1}{p}} \left(\int \left| g\psi_j^4 \right| w(z_1,z_2)dz_2 \right)^{\frac{1}{p}} v_j(z_1)dz_1 +$$
$$+ \int \sum 2^j \left(\int \left| H(r_j(\gamma_j-1))^{kp} \right| dz_2 \right)^{\frac{1}{p}} dz_1 \lesssim \dots$$

пользуясь ограниченностью оператора H в решетке $L^k(\mathbb{T}, L^{kp}(\mathbb{T}))$, можем продолжить оценку

$$\dots \lesssim \int \sum 2^j \lambda_j(z_1)^{-\frac{1}{p}} \left(\int \left| g\psi_j^4 \right| w(z_1,z_2) dz_2 \right)^{\frac{1}{p}} v_j(z_1) dz_1 +$$
$$+ \int \sum 2^j \left(\int |(\gamma_j - 1) r_j|^{kp} dz_2 \right)^{\frac{1}{p}} dz_1 \lesssim$$
$$\lesssim \int \int g(z_1,z_2) w(z_1,z_2) a(z_2) dz_2 dz_1 +$$
$$+ \int \sum 2^j \left(\int |(\gamma_j - 1)|^{kp} w(z_1,z_2) dz_2 \right)^{\frac{1}{p}} v_j(z_1) dz_1 \lesssim$$
$$\lesssim \int \int g(z_1,z_2) w(z_1,z_2) a(z_2) dz_2 dz_1 +$$
$$+ \int \sum 2^j v_j(z_1) \lambda_j(z_1)^{-\frac{1}{s}} \left(\int\limits_{\gamma_j > 1} \left| P_2^u g_1^j \right|^{\frac{p}{s}} w(z_1,z_2) dz_2 \right)^{\frac{1}{p}} dz_1.$$

Здесь первое слагаемое уже равняется A. Вскоре через A оценим и второе.

Для того, чтобы продолжить оценки, нам понадобится некоторое общее следствие из наличия у оператора слабого типа (1,1). Его можно найти, например, в [14] (8.15 в Гл. 1), но здесь мы приведем его в несколько измененной формулировке с доказательством. Пусть некоторый оператор Q обладает слабым типом (1,1) относительно меры ν, A — его (1,1)-норма; также $\lambda > 0$, $0 < \alpha < 1$ — некоторые числа; $e = \{z \,|\, |Qf|(z) > \lambda\}$; $\rho_g(t)$ — функция распределения функции g по мере ν в точке t, тогда

$$\int\limits_e |Qf|^\alpha(z) d\nu(z) = \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \rho_{\chi_e |Qf|}(t) dt = \int\limits_0^c t^{\alpha-1} \rho_{\chi_e |Qf|}(t) dt + \int\limits_c^\infty t^{\alpha-1} \rho_{\chi_e |Qf|}(t) dt \leq$$
$$\leq \nu(e) \int\limits_0^c t^{\alpha-1} dt + A\|f\| \int\limits_c^\infty t^{\alpha-2} dt = \nu(e) \frac{1}{\alpha} c^\alpha + A\|f\| \frac{1}{1-\alpha} c^{\alpha-1}$$

Минимизируя последнее значение по c, получаем, что

$$\int\limits_e |Qf|^\alpha(z) d\nu(z) \leq C(\alpha) A^\alpha \|f\|^\alpha \nu(e)^{1-\alpha}.$$

Теперь, применяя только что доказанное общее утверждение, получим:

$$\left(\int\limits_{\gamma_j>1} \left|P_2^u g_1^j\right|^{\frac{p}{s}} w(z_1,z_2)dz_2\right)^{\frac{1}{p}} \lesssim$$

$$\lesssim \left(\left((w(z_1,\cdot)\mu)\left(\{z_2 \mid \gamma_j(z_1,z_2)>1\}\right)\right)^{\frac{s-p}{p}} \int \left|g\psi_j^4\right| w(z_1,z_2)dz_2\right)^{\frac{1}{s}} \lesssim$$

$$\lesssim \left(\lambda_j(z_1)^{-1}\int \left|g\psi_j^4\right| w(z_1,z_2)dz_2\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{s}} \left(\int \left|g\psi_j^4\right| w(z_1,z_2)dz_2\right)^{\frac{1}{s}} =$$

$$= \lambda_j(z_1)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{p}} \left(\int \left|g\psi_j^4\right| w(z_1,z_2)dz_2\right)^{\frac{1}{p}}$$

Заметим, что константы, скрытые выше под символом “$\lesssim$” не зависят от переменной z_1, так как в силу равномерности наложенных условий Макенхаупта, $(1,1)$-норма проектора P_2^u, зависящая (в силу теоремы 4 из [7]) только от соответствующих A_p-норм весов w и w_1, может быть оценена константой, не зависящей от z_1.

Так что

$$I_4 \lesssim A + \int \sum 2^j v_j(z_1)\lambda_j(z_1)^{-\frac{1}{p}} \left(\int \left|g\psi_j^4\right| w(z_1,z_2)dz_2\right)^{\frac{1}{p}} dz_1 \lesssim A,$$

что и требовалось доказать.

$\square$

Возвращаемся к пространствам Харди

Теперь, наконец, можно получить утверждение про K-замкнутость пары

$$(H_p(b_1(z_1)w_1(z_1,z_2)a_1(z_2)), H_\infty(b_2(z_1)w_2(z_1,z_2)a_2(z_2)))$$

в паре

$$(L_p(b_1(z_1)w_1(z_1,z_2)a_1(z_2)), L_\infty(b_2(z_1)w_2(z_1,z_2)a_2(z_2)))\,.$$

Верна следующая теорема:

Теорема 8. *K-замкнутость имеет место, если*

0) $w_1, w_2, w_1^{\frac{1}{1-p}} \in L^1(\mathbb{T}^2)$

1) $w_2^p w_1$ *удовлетворяет условию* A_∞ *по второй переменной равномерно,*

2) w_1 *удовлетворяет условию* A_p *по второй переменной равномерно,*

3) w_2 *удовлетворяет условию* A_1 *по второй переменной равномерно,*

4) $\log(a_i), \log(b_i) \in BMO$*,*

5) $\log(w_1(\cdot, z_2))$*,* $\log(w_2(\cdot, z_2))$ *лежат в пространстве BMO по первой переменной равномерно.*

Замечание. Заменив одномерные A_p-условия на соответствующие им двумерные, мы, хоть и несколько ослабив предыдущие две теоремы, избавимся от многих неприятных технических условий и сделаем теоремы гораздо более удобными для использования. Например, пропадут условия *0)* в обеих теоремах (так как они будут следовать из двумерных A_p). Окончательный результат, получающийся при таком ослаблении теорем, был изложен в теореме 3 во введении.

§4 K-замкнутость при $r = 1$, $p = \infty$ (склейка)

В этой части мы хотим получить аналог предложения 7 из [1], а именно теорему 5 из введения. Напомним ее формулировку.

Теорема 5. *Если $w_1, w_2 \in A_1$ и $w_1 w_2 \in A_\infty$ (оба условия Макенхаупта двумерные), то пара*

$$(H_1(w_1(z_1, z_2)), H_\infty(w_2(z_1, z_2)))$$

K-замкнута в паре

$$(L_1(w_1(z_1, z_2)), L_\infty(w_2(z_1, z_2)))\,.$$

Доказательство. Нам достаточно найти такие $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < 1$, что K-замкнутость соответствующих пар пространств Харди имеет место для пар (про интерполяцию взвешенных пространств Лебега см. [12])

$$\left(L_1(w_1), L_{\frac{1}{1-\theta_2}}(w_1 w_2^{\frac{\theta_2}{\theta_2-1}})\right),$$

$$\left(L_{\frac{1}{1-\theta_1}}(w_1 w_2^{\frac{\theta_1}{\theta_1-1}}), L_{\frac{1}{1-\theta_4}}(w_1 w_2^{\frac{\theta_4}{\theta_4-1}})\right),$$

$$\left(L_{\frac{1}{1-\theta_3}}(w_1 w_2^{\frac{\theta_3}{\theta_3-1}}), L_\infty(w_2)\right),$$

остальное сделает теорема типа Вольфа для K-замкнутости из [11].

Выберем произвольные $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < 1$. Действительно, из факторизационной теоремы Джонса (см. в [14]) следует, что $w_1 w_2^{\frac{\theta}{\theta-1}} \in A_{\frac{1}{1-\theta}}$, что сразу же дает K-замкнутость для пары $\left(L_{\frac{1}{1-\theta_1}}(w_1 w_2^{\frac{\theta_1}{\theta_1-1}}), L_{\frac{1}{1-\theta_4}}(w_1 w_2^{\frac{\theta_4}{\theta_4-1}})\right)$, а в сумме с теоремой 6 дает K-замкнутость для пары $\left(L_1(w_1), L_{\frac{1}{1-\theta_2}}(w_1 w_2^{\frac{\theta_2}{\theta_2-1}})\right)$.

Выполнено, по условию, что $w_2^{\frac{1}{1-\theta_3}} w_1 w_2^{\frac{\theta_3}{\theta_3-1}} = w_1 w_2 \in A_\infty$, кроме того, из факторизационной теоремы Джонса снова выводим, что $w_1 w_2^{\frac{\theta_3}{\theta_3-1}}$ удовлетворяет условию $A_{\frac{1}{1-\theta_3}}$, а значит теорема 8 дает K-замкнутость для пары пространств $\left(L_{\frac{1}{1-\theta_3}}(w_1 w_2^{\frac{\theta_3}{\theta_3-1}}), L_\infty(w_2)\right)$. Доказательство закончено.

$\square$

§5 Заключение

В работе доказывается, при некоторых условиях на веса, K-замкнутость пары весовых пространств Харди на двумерном торе в паре соответствующих весовых пространств Лебега. Вопрос K-замкнутости пространств Харди на двумерном торе до этого рассматривался лишь в безвесовом случае, либо для весов, распадающихся в произведение двух функций одной переменной (так называемых "разделяющихся весов"). В работе рассмотрен случай некоторых неразделяющихся весов.

Список литературы

[1] Д. В. Руцкий, *Весовое разложение Кальдерона–Зигмунда и некоторые его приложения к интерполяции*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 2014, том 424, 186–200, 2014

[2] Quanhua Xu, *Some properties of the quotient space* $(L^1(\mathbf{T}^d)/H^1(D^d))$, Illinois J. Math. Volume 37, Issue 3 (1993), 437-454, 1993

[3] J. García-Cuerva, K. Kazarian, *Calderón-Zygmund operators and unconditional bases of weighted Hardy spaces*, Studia Mathematica Volume 109, Issue 3, 255-276, 1994

[4] D. Israfilov, A. Guven, *Approximation by trigonometric polynomials in weighted Orlicz spaces*, Studia Mathematica 174 (2006), 147-168, 2006

[5] S. V. Kislyakov, *Interpolation Involving Bounded Bianalytic Functions*, Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 113, 2000

[6] S. V. Kislyakov, *Interpolation of* H^p *spaces: some recent developments* Israel Math. Conf. Proceedings, 13 (1999), 102-140, 1999

[7] S. V. Kislyakov, D. S. Anisimov, *Double singular integrals: interpolation and correction*, St. Petersburg Mathematical Journal, 2005, 16:5, 749–772, 2005

[8] T. W. Gamelin, S. V. Kislyakov, *Chapter 16 - Uniform Algebras as Banach Spaces*, Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 1, 671-706, 2001

[9] S. V. Kislyakov, *Bourgain's Analytic Projection Revisited*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 126, No. 11 (Nov., 1998), pp. 3307-3314, 1998

[10] С. В. Кисляков, *Абсолютно суммирующие операторы на диск-алгебре*, Алгебра и анализ, 1991, том 3, выпуск 4, страницы 1–77, 1991

[11] С. В. Кисляков, Куанхуа Шу, *Вещественная интерполяция и сингулярные интегралы*, Алгебра и анализ, 1996, том 8, выпуск 4, страницы 75–109, 1996

[12] D. Freitag, *Real Interpolation of Weighted L_p-Spaces*, Mathematische Nachrichten, Vol. 86, Issue 1 (1978), 15-18, 1978

[13] R. R. Coifman, G. Weiss, *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. Volume 83, Number 4 (1977), 569-645, 1977

[14] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, 1993

[15] W. Rudin, *Function theory in polydiscs*, Mathematics lecture note series (Выпуск 41), W. A. Benjamin, 1969

[16] J. García-Cuerva, J.L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North-Holland mathematics studies 116, 1985

[17] J. O. Stromberg, A. Torchinsky, *Weighted Hardy Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1989

[18] P. Wojtaszczyk, *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge University Press, 1991

[19] J. Bergh, J. Lofstrom, *Interpolation Spaces*, Springer Berlin Heidelberg, 1976

[20] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Москва "Наука", 1984